*

Noen gjetninger angående ZFC utvidet med aksiomer om urindivider.

*

Morten Rognes

1986

*

Noen gjetninger angående ZFC utvidet med aksiomer om urindivider.

I dette korte arbeidsnotatet skal jeg beskrive en mulig tolkning av systemet ZFC;u–(L;e)[1] – utvidet med visse aksiomer om urindivider – inn i systemet ZFC slik dette er beskrevet i Takeuti [1].

Vi forutsetter at leseren er fullt fortrolig med Rognes [1] og Rognes [2] og bemerker at i det følgende betegner L språket til ZFC. "L;e" betegner språket til ZFC;u(L;e), dvs. språket for mengdelære slik dette er definert i Rognes [1].

Målet i dette notat er å definere en avbildning ß av Fm(L;e) inn i Fm(L) som avbilder teoremene i de forskjellige utvidelsene av ZFC;u–(L;e) som vi vil betrakte inn i mengden av teoremer i systemet ZFC.

Først defineres hierarkiet <R;a(X)>/aêOn/ der X er en vilkårlig mengde ved den følgende induktive definisjon:

Definisjon 1:
(i) R;0(X)= X
(ii) R;(a+1)(X) = Mg(<x,1>: x Inkl R;a(X)) U R;a(X)
(iii) R;a(X) = UN(Mg(R;b(X): b<a)) om aêK;II
dvs. om a er et grenseordinaltall.

Vi definerer så et hierarki <Q;a>/aêOn/ ved transfinit induksjon på den følgende måte:

Definisjon 2:
(i) Q;0= ø
(ii) Q;(a+1) = Mg(<x,0>: xê(R;(a+1)(Q;a) – Q;a)) U Q;a
(iii) Q;a = UN(Mg(Q;b: b<a)) om aêK;II
dvs. om a er et grenseordinaltall.

Intuitivt sett er det meningen at de diverse mengdene Q;a skal representere entiteter som er ikke-mengder, dvs. urindivider. Bakgrunnen for vår definisjon av R;a(X) er at vi ønsker at <R;a(Q;b)>/aêOn/ i en viss forstand skal representere det kumulative hierarki over Q;b. Vi gir derfor den følgende definisjon av uttrykket "Ur", som kan leses " klassen av alle urindivider", og uttrykket "Set", som kan leses "klassen av alle mengder":

Definisjon 3:
(i) Ur = UN(Mg(Q;a: aêOn)
(ii) Set = UN(Mg(R;a(Q;b): a,bêOn)) – Ur

Man bør på dette trinn legge merke til at definisjonene Definisjon 1 – 3 er gitt helt innenfor rammen av ZFC.

---

[1] ZFC;u– aksiomene i L;e, eventuelt et språk L som er en utvidelse av L;e, er aksiomene M1, M3 – M12 beskrevet i Rognes [2]. Systemet ZFC;u–(L), der L er et førsteordens språk som er en utvidelse av L;e, er så den første-ordens teorien hvis ikke-logiske aksiomer er ZFC;u– aksiomene i L. Dette systemet er definert i Rognes [2], §4.

Den funksjonen ß der ß: Fm(L;e) –> Fm(L) som vi ønsker å studere kan nå defineres ved induksjon på lengden av formler i L;e på den følgende måte:

Definisjon 4:
(i) ß(P*Q) = ß(P)*ß(Q)   om * enten er v, &, –> eller <–>
(ii) ß(¬P) = (¬(ß(P)))
(iii) ß((Ax)P) = (Ax)(xêSetU Ur –> ß(P))
(iv) ß((Ex)P) = (Ex)(xê(Set U Ur & ß(P))
(v) ß(x=y) = (x,yê(Set U Ur) & x=y)
(vi) ß(M(x)) = (xêSet)
(vii) ß(xêy) = (xê(Set U Ur) & yêSet & xê(y);1)

I forbindelse med denne definisjonen bemerker vi at hvis x er et n-tuple så betegner (x);j den j ´te komponenten i dette n-tuple. Dette innebærer mer spesielt at hvis x=<a,b>, dvs. hvis x er et ordnet par hvor a og b er henholdsvis den første og den andre komponenten i paret, så betegner "(x);1" den første komponenten i paret og "(x);2" den andre komponenten i paret.

La nå Ur1, Ur2(n) (nêN), Ur3(n) (nêN), Ur4 og Ur6 være de aksiomene om urindivider som ble innført i §4 i Rognes [2]. Det følgende er den første gjetningen som vi ønsker å presentere i dette notat:

T1:
Er S;1 systemet ZFC;u–(L;e) utvidet med Ur1 som nytt ikke-logisk aksiom gjelder følgende:
ß ‘‘(Th(S;1)) Inkl Th(ZFC)

Vi gjetter derfor også på at ß avbilder Th(ZFC;u–(L;e)) inn i Th(ZFC)

Videre synes det også å være av interesse å betrakte den følgende påstand:

T2:
La S være systemet som fremkommer om ZFC;u–(L;e) utvides med enten Ur2(n) for noe n≥1, eller alle Ur2(n) for alle nêw , eller utvides med Ur6.   Da gjelder:
ß‘‘ (Th(S)) Inkl Th(ZFC)

Fra T1 og T2 – om disse påstandene da er riktige – følger at de diverse systemene S;1 og S beskrevet i T1 og T2 er konsistente relativt til ZFC. Dette innebærer i såfall at vi vil ha forbedret teoremene i Rognes [2] om vi kan vise at disse to påstandene er riktige.   Siden ZFC formodentlig også kan tolkes inn i ZFC;u–(L;e) og derfor de utvidelsene av dette systemet som vi nevnte ovenfor (S;1 og de diverse S omtalt i T2) følger det at disse systemene er ekvikonsistentene med ZFC.   Det vil derfor være, noe man sikkert skjønner, av stor interesse å vise at T1 og T2 er riktige.

Vi bemerker at om man endrer konstruksjonen av Q;a noe kan man trolig også vise at de resterende systemene som ble omtalt i Rognes [2], og som ikke er blandt dem som er nevnt ovenfor i T1 og T2 er konsistente (ekvikonsistente) med ZFC.

Det kan også være av interesse å omtale en annen gjetning angående et system som er en utvidelse av ZFC;u–(L;e).

Anta man utvider L;e med et nytt ikke-logisk predikat, nemlig "y er det urindividet som er en-entydig tilordnet mengden x". Dette forkortes med "H(x,y)". Det nye første-ordens språket betegnes med "L;(e,c)". I dette språket L;(e,c) betraktes de følgende formler:

H1 H(x,y) –> (M(x) &¬M(y))
H2 H(x,y;1) & H(x,y;2) –> y;1 = y;2
H3 H(x;1,y) & H(x;2,y) –> x;1=x;2
H4 (Ax)(M(x) –> (Ey)(H(x,y)))
H5 (Ay)(¬M(y) –> (Ex)(H(x,y)))

Den første-ordens teorien i L;(e,c) som har som ikke-logiske aksiomer ZFC;u–aksiomene over L;(e,c) samt alle formlene H1 – H5 kalles for ZFC;u+(L;(e,c)).

Avbildningen ß som ble definert i Definisjon 4 avbildet Fm(L;e) (Inkl Fm(L;(e,c))) inn i Fm(L). Man kan nå utvide domenet til denne funksjonen til hele Fm(L;(e,c)). Dette gjøres ved at man definerer ß som ved Definisjon 4, men legger til følgende klausul for predikatet "H(x,y)":

(viii) ß(H(x,y)) = (xêSet & yêUr & y=<x,0>)

Er nå ß definert som ved (i) – (vii) har man at ß : Fm(L,(e,c)) –> Fm(L).

Den siste gjetningen som vi ønsker å presentere kan formuleres slik:

T3:

La S være systemet ZFC;u+(L;(e,c)) slik det er definert ovenfor. Da har man at ß avbilder alle teoremene i S på teoremer i ZFC, mao.:

ß‘‘Th(S) Inkl Th(ZFC)

Vi har nå presentert de tre gjetningene T1 – T3. Det bør tilslutt bemerkes at vi ikke har foretatt noen detaljert sjekk av disse påstandene. Den mulighet er derfor selvfølgelig tilstede for at man ved et detaljert forsøk på å kontrollere riktigheten av dem kan komme til det resultat at de er feilaktige. Vi håper imidlertid å kunne komme tilbake til disse gjetningene i et senere arbeid.

***

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider. Noen konsistensresultater.*, Maskinskrevet manuskript, 1986.
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
Takeuti [2], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

***